

特约稿件

电磁学与电动力学中的超导

王 青

(清华大学物理系, 北京 100084)

摘 要 本文完全依赖麦克斯韦方程组及欧姆定律证明超导在唯像上就是这样一种介质: 电磁场(光子)在其上会获得有效非零质量.

关键词 超导; 麦克斯韦方程组; 欧姆定律

SUPERCONDUCTIVITY IN THE ELECTROMAGNETISM AND ELECTRODYNAMICS

Wang Qing

(Department of Physics, Tsinghua University, Beijing 100084)

Abstract In this paper, based only on the Maxwell's equations and Ohm's law we proved the superconductivity is a kind of phenomenological medium where the electromagnetic field or photon on the superconductivity will obtain the effective nonzero mass.

Key words superconductivity; Maxwell's equations; Ohm's law

超导即是人们在日常生活中能接触到的高科技, 又是目前科学界尚未彻底研究清楚的前沿热点问题. 在现代物理学历史上, 巴丁、库伯和施里弗因建立的著名的 BCS 超导理论而获得了 1972 年的诺贝尔物理学奖; 柏诺兹和缪勒因发现陶瓷材料中的高温超导而获得了 1987 年的诺贝尔物理学奖; 南部阳一郎因把凝聚态 BCS 超导中的对称性自发破缺概念和方法引入量子场论和基本粒子理论而获得了 2008 年的诺贝尔物理学奖. 实验上发现的高温超导的物理机制至今尚未搞清, 而生活中人们期待着尽早实现室温超导. 在国内大学物理的电磁学及电动力学教学中, 超导已被列为必讲的知识点. 但纵观国内外的电磁学及电动力学教材对超导的介绍, 无不强烈地依赖固态物理及量子力学的辅助知识, 例如谈超导总是要依赖量子力学的波函数. 这即增加了讲授难度, 又大大降低了在电磁学及电动力学课程中介绍超导所能展示的吸引力, 因为在学习电磁学的阶段学生还完全没有能力依赖不懂或不完全的知识来理解全新的课程内容. 笔者在清华大学物理系多年的电动力学教学实践中摸索出一套基本只依赖麦克斯韦方程组及欧姆定律来介绍超导最主要观测现

象(无穷大电导率和迈斯纳效应)的方法. 这个方法曾分别与做凝聚态理论及超导实验研究的同仁进行过切磋, 得到认可. 2013 年 7 月在云南昆明由国家自然科学基金委员会资助、教育部高等学校物理学类专业教学指导分委员会主办, 云南大学物理科学技术学院承办的“2013 年全国高等学校电磁学与电动力学课程骨干教师培训班”上, 笔者介绍了这个方法, 收到与会老师很好的反响. 在本文中对此方法作一介绍, 供老师们课堂讲授超导时借鉴和参考.

超导的部分现象只用麦克斯韦方程组及欧姆定律就能够进行描述这一事实实际上有着更深层的物理含义. 它说明这些现象原来的凝聚态及量子力学描述实际上并不重要, 核心的是其有效的经典电磁学与电动力学描写. 考虑到相对量子及物态的复杂性, 电磁场比较简单和直观, 这种简化描写给予了复杂的超导理论以直观图像. 它不仅

收稿日期: 2013-07-16

作者简介: 王青, 男, 教授, 主要从事理论物理的科研和教学工作, 研究方向为量子场论与基本粒子理论. wangq@mail. tsinghua. edu. cn

有利于教师的讲授及学生的理解,也对从事相关科研的人员开展深入研究会有所启发和指导。

1 经典电磁学和电动力学基础知识的简单回顾

我们首先作一些经典电磁学和电动力学基础知识的简单回顾,以为后面讨论超导作准备。考虑在真空中一团电荷密度为 ρ 、电流密度为 j 的电荷电流源在空间产生电场强度分布为 E 、磁感应强度分布为 B 的电磁场,它们满足如下真空中的麦克斯韦方程组

$$\nabla \cdot E = \frac{\rho}{\epsilon_0} \quad (1)$$

$$\nabla \times E = -\frac{\partial B}{\partial t} \quad (2)$$

$$\nabla \cdot B = 0 \quad (3)$$

$$\nabla \times B = \mu_0 j + \mu_0 \epsilon_0 \frac{\partial E}{\partial t} \quad (4)$$

从式(1)和式(2)可以直接推导出电荷守恒定律,即

$$\nabla \cdot j + \frac{\partial \rho}{\partial t} =$$

$$\nabla \cdot \left(\frac{1}{\mu_0} \nabla \times B - \epsilon_0 \frac{\partial E}{\partial t} \right) + \frac{\partial}{\partial t} (\epsilon_0 \nabla \cdot E) = 0$$

因此电荷守恒不再是独立的定律,而可看作是麦克斯韦方程的导出关系式。

在电磁学和电动力学中除了用电场强度 E 和磁感应强度 B 来描写电磁场外,人们还经常用标量势 ϕ 和矢量势 A 来描写电磁场。场强与势之间的关系满足如下方程

$$B = \nabla \times A \quad (5)$$

$$E = -\nabla \phi - \frac{\partial A}{\partial t} \quad (6)$$

实际上式(5)是方程(3)的解,式(6)结合式(5)是方程(2)的解。式(5)和(6)给出的场强和势之间的关系,不是一一对应的,体现在给定一组 ϕ 和 A 就有一组 E 和 B 与之对应,但反过来给定一组 E 和 B 却有无穷多组 ϕ 和 A 与之对应,对应同一组 E 和 B 不同组的 ϕ' 、 A' 和 ϕ 、 A 之间满足如下关系

$$A' = A + \nabla \chi \quad (7)$$

$$\phi' = \phi - \frac{\partial \chi}{\partial t} \quad (8)$$

或者说把式(5)和(6)中的 ϕ 、 A 换为 ϕ' 、 A' ,公式

仍然成立。式(5)和(6)导致的势的这种不确定性在实际计算中通常通过施加一个所谓规范固定条件(俗称选规范)来去掉。通常在静态或稳恒电磁场情形下人们喜欢用库仑规范,其约束条件是 $\nabla \cdot A = 0$ 。但考虑到这个方程不是明显协变的,在考虑随时间变化的电磁场时,特别是讲过狭义相对论后,人们更喜欢采用另一种协变的规范——洛伦兹规范,它的约束条件是: $\nabla \cdot A + \mu_0 \epsilon_0 \frac{\partial \phi}{\partial t} = 0$ 。

另一方面,势的不确定性或者说任意性在理论上被诠释为电磁场具有一种抽象的 $U(1)$ 电磁对称性,这种对称性的准确描述是电磁现象在由式(7)和(8)给出的由 ϕ 、 A 到 ϕ' 、 A' 的变换下保持不变,或简称电磁作用是 $U(1)$ 规范变换不变的。对称性在理论物理中占有至高无上的地位,电磁作用具有 $U(1)$ 规范对称性是人们从理论的角度理解麦克斯韦方程组乃至电磁作用的基本基础。可以证明,电荷守恒是这种规范对称性的产物。

麦克斯韦方程组若用势 ϕ 和 A 来描写的话,除了定义式(5)和式(6)及导致它们的方程(3)和方程(2)外,方程(1)和方程(4)还分别导致另外两个关于 ϕ 和 A 的方程,它们分别是

$$\left[\nabla^2 - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2}{\partial t^2} \right] A - \nabla \left[\nabla \cdot A + \frac{1}{c^2} \frac{\partial \phi}{\partial t} \right] = -\mu_0 j \quad (9)$$

$$\left[\nabla^2 - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2}{\partial t^2} \right] \phi + \frac{\partial}{\partial t} \left[\nabla \cdot A + \frac{1}{c^2} \frac{\partial \phi}{\partial t} \right] = -\frac{\rho}{\epsilon_0} \quad (10)$$

其中,式(9)是先把式(5)代入矢量运算公式 $\nabla \times (\nabla \times A) = \nabla (\nabla \cdot A) - \nabla^2 A$,再结合方程(4)得到的;式(10)则是直接把式(6)代入方程(1)得到的。很容易验证,在这个方程中把 ϕ 、 A 换为 ϕ' 、 A' ,方程仍然成立(实际上 ϕ 、 A 换为 ϕ' 、 A' 时多出的那些项都相互抵消掉了),或者说方程(9)和(10)在规范变换下也是不变的。注意这里电荷密度 ρ 和电流密度 j 在规范变换下都是不变的量。

2 超导讨论的基本假设

以上是为讨论超导所作的准备,下面讨论超导的基本假设。超导是物质的一种电磁性质,它在电磁学中是由物质的电磁性质方程来决定的。以下不仅要给出超导体所具有的物质电磁性质方程,还将给出对这个方程明确直观的物理诠释。

电磁学和电动力学对于物质材料的描述方式

通常有两种：一种是类似早年麦克斯韦那样直接写下介质中的麦克斯韦方程组，这时方程组里除了电场强度、磁感应强度外还多了电位移矢量和磁场强度。由于多了一倍的场强变量，就还需要一组额外的电磁性质方程组来建立电位移矢量和磁场强度与电场强度和磁感应强度的关系。另一种描述方式是仍旧沿用真空中的麦克斯韦方程组，只不过把在方程组中的电荷密度和电流密度中加入介质上极化和磁化导致的电荷密度和电流密度。这时物质的电磁性质方程体现在物质材料上极化和磁化导致的电荷密度和电流密度和电磁场之间应该具有的某种关系式。我们采用第二种方式来进行讨论。

考虑某种物质材料，在其上描写电磁场的势 ϕ 和 $\mathbf{A}$ 满足如下方程

$$\left[\nabla^2 - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2}{\partial t^2} - \frac{m^2 c^2}{\hbar^2}\right] \mathbf{A} - \nabla \left[\nabla \cdot \mathbf{A} + \frac{1}{c^2} \frac{\partial \phi}{\partial t}\right] = 0 \quad (11)$$

$$\left[\nabla^2 - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2}{\partial t^2} - \frac{m^2 c^2}{\hbar^2}\right] \phi + \frac{\partial}{\partial t} \left[\nabla \cdot \mathbf{A} + \frac{1}{c^2} \frac{\partial \phi}{\partial t}\right] = 0 \quad (12)$$

注意由前面的讨论，任何物质材料都应该满足麦克斯韦方程组(1)–(4)或用势描写的麦克斯韦方程组(5)、(6)、(9)、(10)，只要在式(9)、(10)中的电荷、电流中计及物质材料上极化和磁化导致的电荷和电流即可；因此现在讨论的材料既满足式(11)、(12)，又满足式(9)、(10)。两者相互比较，发现这种物质材料上的总电荷密度和电流密度满足如下电磁性质方程

$$\mathbf{j} = -\frac{m^2 c^2}{\mu_0 \hbar^2} \mathbf{A} \quad (13)$$

$$\rho = -\frac{\epsilon_0 m^2 c^2}{\hbar^2} \phi \quad (14)$$

值得强调的是，上面式(13)和(14)是洛伦兹变换协变的，即可在四维时空写成四矢量方程（实际上前面讨论过的式(1)–(12)都可以写成协变形式的方程）。另一方面式(13)和(14)意味着这种物质材料要破坏由式(7)和(8)给出的规范变换对称性，因为在规范变换下式(13)和(14)的左边是不变的，但右边却不是不变的。更进一步考虑到电荷守恒仍然是成立的，可以看看电荷守恒通过式(13)和(14)对势有什么要求？即，

$$0 = \nabla \cdot \mathbf{j} + \frac{\partial \rho}{\partial t} = -\frac{m^2 c^2}{\mu_0 \hbar^2} \left(\nabla \cdot \mathbf{A} + \mu_0 \epsilon_0 \frac{\partial \phi}{\partial t} \right) \quad (15)$$

我们发现电荷守恒要求势必须满足前面提到过的洛伦兹规范所给出的规范固定条件。进一步将这个洛伦兹规范规范固定条件代回式(11)和(12)，这两个式子化简为

$$\left[\nabla^2 - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2}{\partial t^2} - \frac{m^2 c^2}{\hbar^2}\right] \mathbf{A} = 0 \quad (16)$$

$$\left[\nabla^2 - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2}{\partial t^2} - \frac{m^2 c^2}{\hbar^2}\right] \phi = 0 \quad (17)$$

式(16)和(17)的物理诠释是：电磁场对应的光子是有质量的！我们可以通过如下与量子物理的比对（这是本文唯一需要应用超出经典电磁学的地方，因为对电磁场不涉及量子就没有粒子，也就没有质量的概念）来看出这一点。在量子物理中有著名的对应关系： $\nabla \Leftrightarrow \frac{i}{\hbar} \mathbf{p}$ ， $\frac{\partial}{\partial t} \Leftrightarrow -\frac{i}{\hbar} E$ 。把这两个对应关系代入式(16)和(17)，我们发现它们意味着如下关系： $\frac{E^2}{c^2} - p^2 = m^2 c^2$ 。它正是狭义相对论给出的质量为 m 的粒子的能动量之间的质壳关系。因此这种比对说明电磁场对应的量子—光子是质量为 m 的粒子。注意这个质量完全是此种物质材料内在结构造成的，光子一旦离开这种材料就还会恢复原来的无质量的原始特性，因此真空中的光子仍是无质量的。人们可能会问这个质量 m 是怎么来的？回答是：不知道。目前我们不知道这个质量的起源机制，只知道在这种特殊的物质材料身上，光子会获得一个有效的质量。实际上，这个质量的产生机制是超导理论所要研究的基本问题，它的基础是电磁规范对称性的破缺，它是不可能只在目前经典电磁学的范畴内被解决的，也不是本文打算深入涉及的问题。质量起源问题是当今物理学最重大的科学问题之一，笔者曾在《物理》杂志 2009 年第 38 卷第 10 期第 699—706 页上以“再论质量的起源”为题对相关问题的前沿研究情况作过科普性的介绍，有兴趣的读者可参考那篇文章。我们现在了解到，目前所讨论的这种物质材料与与众不同的电磁性质就是电磁场在其上会获得有效的质量，剩下就是讨论这种电磁性质会导致什么样的实验观测效果。

3 实验观测效果

为了讨论这种物质材料的实验观测效果，首先进一步假设材料本身是导体，也就是说它满足

欧姆定律: $j = \gamma E$. 其中, γ 是材料的电导率, 是电阻的倒数. 这里只讨论最简单的情形, 这时材料上的电导率是一个常数. 在电磁学和电动力学中, 导体上的欧姆定律与电荷守恒定律及麦克斯韦方程(1)(3)个式子结合起来可以给出一个很特别的结果

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} = -\nabla \cdot j = -\gamma \nabla \cdot E = -\frac{\gamma}{\epsilon_0} \rho \quad (18)$$

这是关于导体上总电荷密度的一个针对时间的一阶微分方程, 它的解为: $\rho(t) = \rho(0)e^{-\frac{\gamma}{\epsilon_0}t}$. 也就是说, 在任何导体内部的总电荷密度都是随时间指数衰减的. 因此在导体上, 若考虑长时间的电磁行为, 可以忽略总电荷密度. 以下讨论在这种特殊物质材料上的长时间的电磁行为, 这时 $\rho = 0$, 进一步由式(14)得 $\phi = 0$. 再由式(6)和(13), 得到

$$E = -\nabla \phi - \frac{\partial A}{\partial t} = \frac{\mu_0}{m^2 c^2} \frac{\partial j}{\partial t} \quad (19)$$

这个式子是描述超导著名的伦敦第一方程. 进一步把欧姆定律代入这个方程, 得到

$$j = \gamma E = \frac{\gamma \mu_0}{m^2 c^2} \frac{\partial j}{\partial t}$$

它的解是

$$j(t) = j(0)e^{\frac{\gamma \mu_0 c^2}{m^2} t}$$

我们发现, 若光子有效质量 m 不为零, 导体上的电流会指数增长. 这显然是不可能的, 因此只有: $\gamma = \infty$, 也就是电阻为零, 或者说这种物质材料是理想导体, 在其上电流因此保持稳恒: $j(t) = j(0)$.

为了看到这种物质材料的另一个性质, 对式(13)两边同时求旋度

$$\nabla \times j = -\frac{m^2 c^2}{\mu_0 \hbar^2} \nabla \times A = -\frac{m^2 c^2}{\mu_0 \hbar^2} B \quad (20)$$

式(20)是描述超导著名的伦敦第二方程. 为看到它的物理效果, 先从方程(16)出发, 结合式(13)得到对电流密度的方程 $\left[\nabla^2 - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2}{\partial t^2} - \frac{m^2 c^2}{\hbar^2}\right] j = 0$. 进一步把前面导出的稳恒电流结果应用于此方程, 它化简为 $\left[\nabla^2 - \frac{m^2 c^2}{\hbar^2}\right] j = 0$. 再在此方程两边求旋度, 并应用式(20), 它导致恒定的磁感应强度. 最后得到此种物质材料上的磁感应强度满足方程

$$\left[\nabla^2 - \frac{m^2 c^2}{\hbar^2}\right] B = 0 \quad (21)$$

对任意一块满足此方程的材料, 若将坐标原点选在材料和真空接壤的边界 $r = 0$ 处, 则方程(21)的解为: $B(r) = B(0)e^{\pm k \cdot r}$. 其中, 矢量 k 的模满足限

制条件: $k^2 = \frac{m^2 c^2}{\hbar^2}$. 也就是说从材料和真空接壤的

边界向材料内部看, 磁感应强度只可能是指数增长或衰减的. 但指数增长是不可能的, 因此磁感应强度在材料内部只可能是指数衰减的. 这就是著名的超导迈斯纳效应. 磁场基本都被排除在材料体外, 在体内指数衰减.

由此我们假设一种物质材料在其上光子会获得一个非零的有效质量, 导出了这种材料的电导率为无穷大, 磁感应强度指数衰减. 这是超导材料的典型特征, 因此可称这种材料就是超导体. 这里所讨论的超导性质都来自于光子的有效质量. 有人会问它到底有多大? 注意到上面导出的伦敦第一和第二方程中的系数都与这个光子有效质量相关, 而实验上或更基本的理论计算完全可以决定这些系数, 因此可以确定出相应的光子有效质量.

4 电磁性质

还可以进一步讨论这种超导材料的电磁性质. 首先讨论磁性质, 利用电磁学中磁感应强度 B 、磁场强度 H 和磁化强度 M 的关系式: $B = \mu_0(H + M)$, 结合超导体内部, 磁感应强度基本衰减为零的性质, 得到在超导体内部有 $M = -H$. 对比标准的磁化率 χ_m 定义式: $M = \chi_m H$, 得到超导体的磁化率 $\chi_m = -1$, 是完全抗磁物质. 再讨论电性质, 利用电磁学中极化率 χ_e 和极化强度 P 的关系式: $\frac{1}{\chi_e} P = \epsilon_0 E$, 再考虑到超导体上有限的电流密度和无穷大的电导率由欧姆定律要求超导体内部电场强度必须为零, 针对一般不为零的极化强度 P , 得到超导体的极化率 $\chi_e = \infty$, 是理想的导体.

5 光子的有效质量

到此为止, 我们证明了一种物质材料上若光子会获得有效质量则导致超导. 反过来我们看到的超导, 能否一定导致光子会获得有效质量呢? 或者说超导是否一定导致式(13)和(14)呢? 回答此问题涉及如何定义一个超导体, 我们选择定义满足伦敦第二方程(20)的材料为超导体. 这时式(20)的一般解为

(下转第9页)

4 几点随想

为了便于相比较,读者只要对式(20)、(33)作适当变换,与其标准形式(图8)

$$\rho = e^{a\theta} \quad (34)$$

相比较,即可以得到与式(34)相一致的结果.

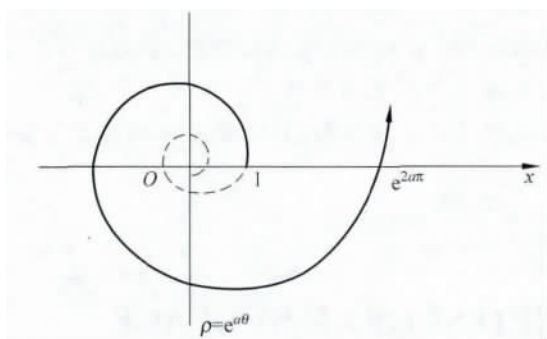


图8 对数螺线(等角螺线)

本文给出的两种雷同的结果,乃基于质点运动学的本质是几何学的.由此观点出发,才能显山露水.虽然数学演算冗长,但毕竟获得了预期的结果.至于其中恐有不妥之处,恳请读者指教.

特别是从网上阅读了这方面的一些文章,对本文增益良多;且对对数螺线在今后开拓科技领域的研究,大有裨益.

窃以为以对数螺线作为理工科物理或工程力学课程教学中的例题或习题,似不合适;但为了培养科研型人才的需要,组织一些有兴趣的学生,成立科研小组,以对数螺线作为专题,开拓一些有关科研项目,或许对培养学生的科研能力有所裨益.

注:图5、图6、图8中,曲线的起点不在原点.

鸣谢:本文在同济大学出版社副总编曹建同志的关注下,叨蒙陈佳蔚编辑的精心校订,为感无既.

参 考 文 献

- [1] 周衍伯. 理论力学[M]. 南京: 江苏人民出版社, 1961.
- [2] 陈红, 陈虹邑, 段怡. 浅谈对数螺线. <http://wenku.baidu.com/view/347f4d0003d8ce2f006623fd.html>.
- [3] <http://www.xici.net/b12018/d7952923.htm>.
- [4] 严导淦. 论质点运动学中的自然法[J]. 宁波高等专科学校学报, 1989, 1(1).

(上接第4页)

$$\mathbf{j} = -\frac{m^2 c^2}{\mu_0 \hbar^2} (\mathbf{A} + \nabla \chi) \quad (22)$$

其中, χ 为任意一个标量场. 与这个式子对应的满足狭义相对论中的相对性原理的式子是

$$\rho = -\frac{\epsilon_0 m^2 c^2}{\hbar^2} \left(\phi - \frac{\partial \chi}{\partial t} \right) \quad (23)$$

或者说式(23)可由洛伦兹变换通过式(22)得到. 这个式子实际上将导致一个推广的伦敦第一方程, 即

$$\mathbf{E} = -\nabla \phi - \frac{\partial \mathbf{A}}{\partial t} = \frac{\mu_0 \hbar^2}{m^2 c^2} \left(\frac{1}{\mu_0 \epsilon_0} \nabla \rho + \frac{\partial \mathbf{j}}{\partial t} \right) \quad (24)$$

注意到矢量势 $\mathbf{A}$ 原本就有一定的定义任意性(或前面讨论过的规范对称性), 可以通过选择规范把 χ 场去掉, 因此就得到了式(13)和(14), 也就是光子会有有效质量.

6 结论

到此为止, 我们已经在经典电磁学和电力

学的范畴内证明了只要一种导电物质材料使得电磁场(光子)在其上获得有效质量, 就会导致超导. 反过来只要有超导, 电磁场(光子)在其上必获得有效质量.

从更一般的角度看, 若把超导材料看成是一种介质, 电磁场在其中的传播因为获得质量而从原来真空中的幂次性衰减转变为指数型衰减. 人们现在把这个经验也用于讨论基本粒子电弱统一理论的真空. 在这个理论中传递弱作用的 $W^\pm$ 和 Z^0 粒子在真空中也类似于目前在超导体中的光子获得了质量, 导致它们对应的场的传播指数衰减. 若把电弱统一理论的真空看成是一种更广义的介质, 则人们称电弱统一理论的真空实际上是一种超导态. 而促使这种超导态形成的对称性表现就像本文讨论的普通超导导致电磁规范对称性破坏一样, 是一种更复杂的电弱规范对称性破坏来实现的. 近来学术界热炒的所谓“上帝粒子”就是这种电弱规范对称性破坏的一个标志物.